

# Ala Anulare Ellittica: Distribuzione di Circolazione di Minima Resistenza Indotta

L. Demasi

*Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale,  
Politecnico di Torino, Torino*

## *Sommario*

In questo lavoro viene presentata la determinazione della distribuzione di circolazione di *minima resistenza indotta* per l'ala anulare ellittica e si mostra che l'efficienza del sistema chiuso in condizioni ideali è superiore a quella di un'ala classica sottoposta a distribuzione di circolazione ellittica (dunque ottima). Il confronto, sempre in condizioni ideali, viene svolto a parità di portanza sviluppata ed apertura alare. Si arriva ad un interessante risultato: l'ala anulare ellittica tende ad avere la stessa resistenza indotta dell'ala classica quando risulta schiacciaticissima. Inoltre, l'efficienza aerodinamica aumenta man mano che ci si allontana da questa condizione.

La circolazione di ottimo viene trovata risolvendo un problema di calcolo delle variazioni con vincolo (la portanza assegnata) imposto. L'equazione di Eulero che risolve il problema è un'equazione integrale a nucleo ipersingolare (parte finita di Hadamard) e viene risolta analiticamente e numericamente usando il metodo di collocazione. Viene anche dimostrato che la circolazione così trovata soddisfa perfettamente il noto teorema di Munk "del coseno" sulla resistenza indotta in condizioni di minimo, a conferma dei risultati trovati. La procedura usata è del tutto generale e può essere impiegata con successo anche ad altri casi, quali biplano, archi di parabola, di iperbole, di ellisse e di cerchio.

## 1. Introduzione

L'importanza di una riduzione della resistenza indotta, è enorme in campo aeronautico. Come spiegato in [1], essa rappresenta circa il 40% della resistenza complessiva nelle condizioni di crociera, e l'80-90% della resistenza complessiva al decollo. Una riduzione della resistenza indotta, comporterebbe dunque un drastico abbattimento del livello del rumore, specie nelle fasi iniziali del volo (decollo).

Fin dagli arbori dell'aerodinamica, si studiò il problema della sua minimizzazione a parità di portanza ed apertura alare [2]. È ben noto che in un'ala ad allungamento finito la condizione di ottimo è rappresentata da una distribuzione ellittica di circolazione lungo l'apertura. Ma gli studiosi si sono spinti oltre. Prandtl nel 1924 [3] studiò il biplano ad ali congiunte ed affermò come fra tutti i sistemi portanti costituiti da ali parallele, la configurazione alare che presenta la minima resistenza indotta è realizzata usando due ali fra loro collegate da paratie verticali. Lo studio effettuato da Prandtl non fu però attivamente sfruttato, visti i problemi aeroelastici connessi con la realizzazione di una configurazione "joined wing" alla Prandtl o da essa derivata. Ma con l'introduzione dei nuovi materiali compositi, il problema è teoricamente risolubile mediante opportuno tailoring aeroelastico. Nuovi studi sono allora stati effettuati [4], [1] al fine di determinare la distribuzione ottimale di circolazione sul box alare e la configurazione "joined wing" è tornata ad essere di interesse [5].

Nel presente lavoro, si cerca di rispondere alla domanda: "*Qual è la distribuzione di circolazione che in un'ala anulare ellittica minimizza la resistenza indotta assegnata una data portanza ed apertura alare?*". Si rimanda alle pubblicazioni [6], [7], [8] e soprattutto [9] per la formulazione analitica delle espressioni della resistenza indotta e portanza che vengono qui utilizzate.

In tutti i casi le ali sono studiate considerandole disposte in un piano perpendicolare alla corrente, dato che per uno dei noti teoremi di Munk è possibile traslare i segmenti portanti nella direzione della corrente asintotica

senza cambiare il valore della resistenza indotta<sup>1</sup> [2]. Inoltre la scia è considerata avere la stessa forma che ha quando lascia il bordo di fuga. Dunque il modello qui esposto ha validità generale ma vale solo nell'ambito delle piccole perturbazioni. Gli stessi teoremi di Munk [2] valgono solo sotto queste ipotesi.

Nel caso di sistemi chiusi (ala anulare circolare ed ellittica) la distribuzione ottima che si determina con la procedura che verrà mostrata *non è unica* ma ne esistono *infinite* che differiscono per una costante additiva. Infatti, se si somma alla circolazione ottima un vortice costante, questo non produce effetti sulla resistenza indotta non presentando gradienti. Il concetto è altresì noto dalla letteratura ([1], [10]). In questo lavoro viene dimostrata questa proprietà per il caso di ala anulare circolare ed ellittica.

## 2. Caso 1: Ala classica

È risaputo che in un'ala classica la distribuzione ottimale di circolazione<sup>2</sup> è quella ellittica. Con questa informazione, e con il vincolo di coefficiente di portanza assegnato, si può dimostrare che la distribuzione ottima di dipoli  $m^3$  con asse secondo la direzione opposta a quella di calcolo della portanza ha espressione:

$$m = \frac{2\bar{C}_L l V_\infty^2}{\pi} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b_w^2}}, \quad (1)$$

dove  $\bar{C}_L$  indica il coefficiente di portanza (area di riferimento superficie alare in pianta),  $b_w$  indica la semiapertura alare,  $l$  la corda alare (supposta costante) e  $y$  la coordinata longitudinale lungo l'apertura, con origine nella mezzeria dell'ala. Il corrispondente coefficiente di resistenza indotta vale:

$$(C_{D_i})_{\text{ref}} = \frac{l\bar{C}_L^2}{\pi 2b_w}, \quad (2)$$

dove la dicitura ref è usata per sottolineare che l'ala classica è presa come riferimento nella trattazione che segue.

In caso si fosse interessati ai valori delle forze, dai coefficienti si ricava facilmente:

$$(D_i)_{\text{ref}} = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S (C_{D_i})_{\text{ref}} = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 2b_w l \frac{l\bar{C}_L^2}{\pi 2b_w} = \frac{\bar{L}^2}{\pi q (2b_w)^2}, \quad (3)$$

dove  $q = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$ . L'efficienza in condizioni di ottimo risulta pertanto:

$$E_{\text{ref}} = \frac{\pi q (2b_w)^2}{\bar{L}}. \quad (4)$$

Questi valori verranno utilizzati come confronto negli sviluppi che seguono.

## 3. Caso 2: ala anulare circolare

### 3.1 Scrittura dell'equazione di Eulero mediante calcolo variazionale

Il coefficiente di resistenza indotta, riferito al doppio dell'ala in pianta, rappresenta *il funzionale da minimizzare*. Usando la stessa simbologia di [8] ed indicando con  $t$  ed  $s$  le quantità

$$\varphi_d = \pi(t+1), \varphi = \pi(s+1), \quad (5)$$

<sup>1</sup>Questa operazione va fatta mantenendo invariato il valore della circolazione.

<sup>2</sup>Si ricorda che parlare di distribuzione di dipoli o di circolazione è la stessa cosa a meno di una costante moltiplicativa: la velocità del fluido indisturbato  $V_\infty$ .

<sup>3</sup>Si usa il potenziale delle accelerazioni. Per ulteriori dettagli vedere [8] e [9].

e con  $R_w$  il raggio, si può dimostrare [9] che tale funzionale ha espressione<sup>4</sup>:

$$J = C_{D_i} = \frac{\pi}{16R_w l V_\infty^4} \int_{-1}^1 m(s) \left( - \int_{-1}^1 m(t) \left( \frac{1}{(1 - \cos(\pi(t-s)))} \right) dt \right) ds. \quad (6)$$

Condizioni:

- La distribuzione di dipoli  $m$  deve essere una funzione continua;
- $m(-1) = m(+1)$  (condizione di periodicità essendo l'ala ad anello);
- $-\frac{\pi}{2lV_\infty^2} \int_{-1}^1 m(t) \sin(\pi t) dt = \overline{C}_L$ ,

con  $\overline{C}_L$  indicante il coefficiente di portanza dell'ala (supposta portante) e assegnato. Questo vincolo ha senso in quanto tutti i confronti fra le varie ali viene eseguito a parità di apertura alare e di portanza assegnata<sup>5</sup>. Solo così infatti si è sicuri che le differenze di resistenza indotta siano imputabili esclusivamente alla geometria dell'ala rispetto ad una di confronto.

Secondo la procedura del calcolo delle variazioni [16], si estende il calcolo variazionale al caso in esame. Con i passaggi riportati in appendice A, si perviene all'equazione di Eulero:

$$\frac{1}{4R_w V_\infty^2} \int_{-1}^1 \frac{m(s)}{1 - \cos(\pi(t-s))} ds - \lambda \sin(\pi t) = 0. \quad (7)$$

Naturalmente la funzione candidata a minimizzare il funzionale deve soddisfare *contemporaneamente* questa equazione e la condizione di vincolo.

### 3.2 Soluzione analitica dell'equazione di Eulero

Le equazioni da risolvere sono dunque rappresentate dalla (7) e dal vincolo:

$$-\frac{\pi}{2lV_\infty^2} \int_{-1}^1 m(t) \sin(\pi t) dt = \overline{C}_L. \quad (8)$$

Osservando le due espressioni, si nota come la funzione  $\sin(\pi t)$  compaia in maniera esplicita in entrambe. Inoltre essa possiede quelle caratteristiche di periodicità e continuità che si ricercano per la soluzione del problema. È dunque abbastanza intuitivo scegliere come funzione candidata  $m(s) = k \sin(\pi s)$ . Nell'appendice B si riporta la soluzione analitica dell'integrale ipersingolare che compare nell'equazione (7). In particolare si dimostra che

$$\int_{-1}^{+1} \frac{k \sin(\pi s)}{1 - \cos(\pi(t-s))} ds = -2k \sin(\pi t). \quad (9)$$

Usando questo risultato, l'equazione di Eulero (7) diviene dunque:

$$\frac{-2k \sin(\pi t)}{4R_w V_\infty^2} - \lambda \sin(\pi t) = 0, \quad (10)$$

<sup>4</sup>Il simbolo

$$\int,$$

indica che l'integrale va interpretato come parte finita di Hadamard.

<sup>5</sup>Si noti che se la superficie di riferimento di due ali che si vogliono confrontare non risulta la stessa, bisogna imporre che i due sistemi abbiano la stessa portanza e non lo stesso coefficiente di portanza per fare un obiettivo e corretto confronto della resistenza indotta.

mentre la condizione di coefficiente di portanza assegnato risulta:

$$-\frac{\pi}{2lV_\infty^2} \int_{-1}^{+1} k \sin^2(\pi t) dt = -\frac{1}{2} \frac{\pi}{lV_\infty^2} k = \bar{C}_L. \quad (11)$$

Da quest'ultima:

$$k = -\frac{2lV_\infty^2 \bar{C}_L}{\pi}. \quad (12)$$

Sostituendo nella (10):

$$\lambda = \frac{l\bar{C}_L}{\pi R_w}. \quad (13)$$

Come si vede la scelta effettuata della funzione rappresentate la distribuzione di dipoli è corretta: entrambe le equazioni sono state soddisfatte contemporaneamente.

Dunque si è arrivati alla conclusione che la *distribuzione ottimale realizzante la minima resistenza indotta, in un'ala anulare circolare*, è di tipo *sinusoidale*<sup>6</sup>. Si ha in particolare:

$$m(s) = k \sin(\pi s) = -\frac{2lV_\infty^2 \bar{C}_L}{\pi} \sin(\pi s). \quad (14)$$

O se si vuole, nelle variabili originarie (usando la (5)):

$$m(\varphi) = \frac{2lV_\infty^2 \bar{C}_L}{\pi} \sin(\varphi). \quad (15)$$

Il relativo *coefficiente di resistenza indotta in condizioni di ottimo* è pertanto<sup>7</sup>:

$$(C_{D_i})_{\frac{a_w}{b_w}=1} = \frac{l\bar{C}_L^2}{2\pi R_w}. \quad (16)$$

Equivalentemente, passando alla *resistenza indotta*

$$(D_i)_{\frac{a_w}{b_w}=1} = \frac{\bar{L}^2}{2\pi q (2R_w)^2}. \quad (17)$$

L'*efficienza aerodinamica* è dunque:

$$(E)_{\frac{a_w}{b_w}=1} = \frac{2\pi q (2R_w)^2}{\bar{L}}. \quad (18)$$

A questo punto si può paragonare l'efficienza a quella di un'ala classica con la stessa portanza (non coefficiente, avendo aree di riferimento differenti) ed apertura alare. Osservando che  $R_w = b_w$ , dalla (4):

$$\frac{(E)_{\frac{a_w}{b_w}=1}}{(E)_{\text{ref}}} = 2. \quad (19)$$

<sup>6</sup>In realtà si è dimostrato matematicamente solo che il funzionale è stazionario per una distribuzione sinusoidale di circolazione. La verifica che la funzione trovata sia effettivamente una funzione minimizzante la resistenza indotta è eseguita dalla semplice osservazione che un noto teorema di Munk [2] è soddisfatto, come si vedrà oltre.

<sup>7</sup>Esso viene indicato col pedice  $\frac{a_w}{b_w}=1$  per evidenziare come sia relativo all'ala anulare circolare, pensata come caso particolare di un'ala anulare ellittica in cui i due semiassi  $a_w$  e  $b_w$  sono uguali.

## 4. Caso 3: ala anulare ellittica

### 4.1 Ala anulare ellittica con $a_w < b_w$

Si consideri la trattazione [8], per il caso in cui il *semiasse maggiore* sia la semiapertura alare  $b_w$ . Il problema si affronta in maniera simile al caso di ala anulare circolare. Il coefficiente di resistenza indotta è:

$$C_{D_i} = -\frac{\pi}{16b_w l V_\infty^4} \int_{-1}^1 m(s) \int_{-1}^1 m(t) K(t, s) dt ds, \quad (20)$$

con  $K(t, s)$  *nucleo simmetrico* dato da:

$$K(t, s) = \frac{\sinh^2 \psi_w \cosh^2 \psi_w}{(\sinh^2 \psi_w + \sin^2(\frac{\pi(t+s)}{2}))^2} - \frac{\frac{1}{2} \cosh(2\psi_w)}{(\sinh^2 \psi_w + \sin^2(\frac{\pi(t+s)}{2}))} + \frac{1}{(1 - \cos(\pi(t-s)))}. \quad (21)$$

Il coefficiente di portanza rappresenta, da un punto di vista matematico, il *vincolo* al problema di ottimizzazione. La sua espressione è

$$\bar{C}_L = -\frac{\pi}{2lV_\infty^2} \int_{-1}^1 m(t) \sin(\pi t) dt. \quad (22)$$

Dove la barra indica che il valore è fissato. In appendice C si dimostra che la distribuzione ottima di dipoli ha la stessa espressione vista per il caso di ala anulare circolare. Inoltre si prova che valgono le espressioni:

$$\begin{aligned} k &= -\frac{2lV_\infty^2}{\pi} \bar{C}_L, \\ \lambda &= \frac{2l\bar{C}_L}{\pi(b_w + a_w)}, \\ (C_{D_i})_{\frac{a_w}{b_w} < 1} &= \frac{l\bar{C}_L^2}{\pi(b_w + a_w)}. \end{aligned} \quad (23)$$

La corrispondente *resistenza indotta* è:

$$(D_i)_{\frac{a_w}{b_w} < 1} = \frac{\bar{L}^2}{\pi q \left(\frac{b_w + a_w}{b_w}\right) (2b_w)^2}, \quad (24)$$

mentre l'*efficienza aerodinamica* ha espressione:

$$(E)_{\frac{a_w}{b_w} < 1} = \frac{\pi q \left(\frac{b_w + a_w}{b_w}\right) (2b_w)^2}{\bar{L}}. \quad (25)$$

Ed usando infine la (4) si può confrontare il guadagno rispetto all'ala classica:

$$\frac{(E)_{\frac{a_w}{b_w} < 1}}{(E)_{\text{ref}}} = \frac{b_w + a_w}{b_w} = 1 + \frac{a_w}{b_w}. \quad (26)$$

Si osservi come la relazione trovata *include il caso particolare di ala anulare circolare*. Se infatti si fanno tendere i semiassi ad un valore comune  $R_w$ , si ritrova la formula (19).

### 4.2 Ala anulare ellittica con $a_w > b_w$

Si consideri il caso in cui il *semiasse minore* sia la semiapertura alare  $b_w$ . Il problema è molto simile a quelli visti. Si accenna soltanto alla trattazione per brevità (per ulteriori dettagli si veda [9]). Con la trasformazione

di coordinate<sup>8</sup> molto simile a quella usata in [8]:

$$\begin{aligned} y &= c \sinh \psi \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z &= c \cosh \psi \sin \varphi & \psi > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

Si arriva a dimostrare che il coefficiente di resistenza indotta è:

$$C_{D_i} = -\frac{\pi}{16b_w l V_\infty^4} \int_{-1}^1 m(s) \int_{-1}^1 m(t) K(t, s) dt ds, \quad (28)$$

con  $K(t, s)$  nucleo simmetrico dato da

$$K(t, s) = \frac{\sinh^2 \psi_w \cosh^2 \psi_w}{\left(\sinh^2 \psi_w + \cos^2\left(\frac{\pi(t+s)}{2}\right)\right)^2} - \frac{\frac{1}{2} \cosh(2\psi_w)}{\left(\sinh^2 \psi_w + \cos^2\left(\frac{\pi(t+s)}{2}\right)\right)} + \frac{1}{(1 - \cos(\pi(t-s)))}. \quad (29)$$

Il coefficiente di portanza rappresenta il *vincolo* al problema di ottimizzazione. La sua espressione è

$$\bar{C}_L = -\frac{\pi}{2lV_\infty^2} \int_{-1}^1 m(t) \sin(\pi t) dt, \quad (30)$$

dove la barra indica che il valore è fissato. Senza eseguire le dimostrazioni (si veda [9]), si può far vedere che :

$$\begin{aligned} k &= -\frac{2lV_\infty^2}{\pi} \bar{C}_L, \\ \lambda &= \frac{2l\bar{C}_L}{\pi(b_w + a_w)}; \end{aligned} \quad (31)$$

$$(C_{D_i})_{\frac{a_w}{b_w} > 1} = \frac{l\bar{C}_L^2}{\pi(b_w + a_w)}. \quad (32)$$

Si noti che l'espressione formale è *la stessa del caso di ala anulare ellittica con  $a_w < b_w$* . Pertanto valgono le stesse espressioni viste, ed in particolare si ha:

$$\frac{(E)_{\frac{a_w}{b_w} > 1}}{(E)_{\text{ref}}} = \frac{b_w + a_w}{b_w} = 1 + \frac{a_w}{b_w}. \quad (33)$$

## 5. Teorema di Munk sulla circolazione di minima resistenza indotta

Con riferimento alla figura 1, il teorema di Munk [2] afferma che *in condizioni di ottimo, la distribuzione di circolazione è tale da indurre una velocità indotta (perpendicolare alla linea portante)<sup>9</sup> il cui modulo diviso per il coseno dell'angolo  $\delta$  che tale velocità forma con la direzione di calcolo della portanza, è una costante. Questo deve valere per tutti i punti dell'ala*. Tradotto in formule, il teorema di Munk è:

$$\frac{u_n}{\cos \delta} = \text{cost}. \quad (34)$$

Si dimostra ora che in tutti i casi esaminati in precedenza la distribuzione di dipoli (e dunque la circolazione) soddisfa questo teorema e dunque è la distribuzione ottima cercata.

<sup>8</sup>Le relazioni che legano le funzioni iperboliche ai semiassi dell'ellisse sono ora leggermente differenti rispetto al caso in cui  $a_w < b_w$ :

$$\begin{aligned} \cosh^2 \psi_w &= \frac{a_w^2}{a_w^2 - b_w^2}, \\ \sinh^2 \psi_w &= \frac{b_w^2}{a_w^2 - b_w^2}. \end{aligned}$$

<sup>9</sup>È facile vedere come nei casi esaminati il "normalwash" nel piano di Trefftz è lo stesso, a meno di una costante, di quello che si ha in corrispondenza della linea portante. Si veda [9]. Questo comporta che il teorema di Munk può essere riferito indifferentemente nel piano di Trefftz o in corrispondenza del segmento portante.

- *Ala classica a distribuzione ellittica di circolazione.* È noto dalla letteratura (ed inoltre è facilmente dimostrabile) che la velocità indotta risulta costante lungo l'apertura alare. Pertanto il teorema di Munk è evidentemente soddisfatto. Dunque come noto, la distribuzione ellittica di circolazione è quella di minima resistenza indotta.
- *Ala anulare circolare.* La velocità indotta (nella direzione perpendicolare all'ala) è data dall'espressione (si veda [9]):

$$u_\varphi(\varphi) = -\frac{lV_\infty \bar{C}_L \sin \varphi}{2\pi R_w}. \quad (35)$$

Ricavata usando la distribuzione di dipoli candidata ad essere quella di minima resistenza indotta e data dalla relazione (15). Dalla figura 1, si capisce anche che  $\cos \delta = \sin \beta = \sin \varphi$ . Si riconosce subito che la (35) soddisfa la (34). Si ha in particolare:

$$\frac{u_n}{\cos \delta} = \frac{-\frac{lV_\infty \bar{C}_L \sin \varphi}{2\pi R_w}}{\sin \varphi} = -\frac{lV_\infty \bar{C}_L}{2\pi R_w} = \text{cost.} \quad (36)$$

- *Ala anulare ellittica con  $a_w < b_w$ .* La velocità indotta (nella direzione perpendicolare all'ala) è data dall'espressione (si veda [9]):

$$u_n(\varphi) = -\frac{\cosh \psi_w \sin \varphi}{\sqrt{\cosh^2 \psi_w - \cos^2 \varphi}} \frac{lV_\infty \bar{C}_L (\cosh \psi_w - \sinh \psi_w)}{\pi c}, \quad (37)$$

dove si è usato il fatto che la distribuzione ottima candidata è quella sinusoidale. Osservando la figura 1 e ricordando la relazione (si veda [8] e [9])

$$\sin \beta = \frac{\cosh \psi_w \sin \varphi}{\sqrt{\cosh^2 \psi_w - \cos^2 \varphi}}, \quad (38)$$

tenuto presente (figura 1) che  $\cos \delta = \sin \beta$ , si deduce che la (37) soddisfa la (34). Si ha in particolare:

$$\frac{u_n}{\cos \delta} = \frac{-\frac{\cosh \psi_w \sin \varphi}{\sqrt{\cosh^2 \psi_w - \cos^2 \varphi}} \frac{lV_\infty \bar{C}_L (\cosh \psi_w - \sinh \psi_w)}{\pi c}}{\frac{\cosh \psi_w \sin \varphi}{\sqrt{\cosh^2 \psi_w - \cos^2 \varphi}}} = -\frac{lV_\infty \bar{C}_L (\cosh \psi_w - \sinh \psi_w)}{\pi c} = \text{cost.} \quad (39)$$

- *Ala anulare ellittica con  $a_w > b_w$ .* Valgono le stesse considerazioni svolte in precedenza. Si ha ora:

$$u_n(\varphi) = -\frac{\sinh \psi_w \sin \varphi}{\sqrt{(\sinh^2 \psi_w + \cos^2(\varphi))}} \frac{lV_\infty \bar{C}_L (\cosh \psi_w - \sinh \psi_w)}{\pi c}. \quad (40)$$

Il teorema di Munk è anche ora soddisfatto:

$$\frac{u_n}{\cos \delta} = -\frac{lV_\infty \bar{C}_L (\cosh \psi_w - \sinh \psi_w)}{\pi c} = \text{cost.} \quad (41)$$

Dunque le distribuzioni trovate che soddisfavano l'equazione di Eulero, sono effettivamente condizioni di minimo della resistenza indotta.

## 6. Soluzione numerica dell'equazione di Eulero

Il sistema rappresentato dall'equazione di Eulero e dal vincolo di portanza assegnata, non può essere in generale risolto mediante passaggi analitici come fatto per l'ala anulare ellittica o circolare. Pertanto si mostra qui una procedura numerica che può essere usata anche in altri casi. In sostanza, essa consiste nelle seguenti fasi.

- Si assegna un valore arbitrario *non nullo* del moltiplicatore di Lagrange  $\lambda$ .
- Con questo valore assegnato di  $\lambda$  si risolve numericamente l'equazione di Eulero mediante metodo di collocazione ([8], [11], [9]). Si osservi che la distribuzione  $m$  così calcolata è quella corretta a meno di una costante moltiplicativa.
- Si calcola il coefficiente di portanza.
- In generale il coefficiente ricavato *non coincide* col valore assegnato. Si calcola allora il rapporto  $\mu$  tra il coefficiente imposto e quello calcolato.
- In virtù della linearità delle equazioni, la distribuzione ottima di dipoli sarà quella inizialmente calcolata *moltiplicata per  $\mu$* . Come si vede questa procedura permette di calcolare facilmente la distribuzione di minima resistenza indotta senza ricorrere a calcoli iterativi, sfruttando semplicemente la linearità delle equazioni.

## 7. Risultati

Nella figura 2 si riporta il rapporto fra le efficienze dell'ala anulare ellittica e dell'ala classica presa come riferimento. Nella tabella 1 si riporta invece un confronto numerico fra il coefficiente di resistenza indotta teorico e calcolato. I dati usati per il calcolo sono:  $b_w/l = 10$ ,  $C_L = 1$ , 20 punti di collocazione. La tabella riportata fornisce anche una ulteriore validazione numerica del codice usato in [8].

In appendice D si dimostra per l'ala anulare circolare ed ellittica la nota proprietà sulla distribuzione ottima nei sistemi chiusi: la soluzione *non è unica, ma esistono infinite distribuzioni ottime e queste differiscono tutte per una costante arbitraria*.

Un interessante applicazione della procedura vista può essere lo studio di un biplano con ali avente la stessa apertura  $2b_w$  e distanti  $H$ . Comunemente, in molte pubblicazioni e siti web, si trova l'informazione che la distribuzione ottima di un biplano è quella ellittica. Con il metodo assolutamente generale studiato in questo articolo, si dimostra che *in un biplano la distribuzione ottima non è quella ellittica*. Solo nei casi degeneri  $H \rightarrow 0$  e  $H \rightarrow \infty$  questo è vero. Lo studio è riportato in appendice E.

## 8. Conclusioni e possibili estensioni ad altri lavori

Si è mostrata che la distribuzione ottimale di circolazione (o se si vuole di dipoli del potenziale delle accelerazioni) per un'ala anulare circolare ed ellittica è di tipo sinusoidale ed inoltre si è verificato che questa soddisfa il teorema di Munk. La procedura numerica usata per risolvere il problema di ottimo ha mostrato una notevole rispondenza con i valori teorici disponibili. Essa inoltre è facilmente applicabile a tutti i casi in cui l'equazione della linea portante è esprimibile mediante un'unica equazione<sup>10</sup>. Per esempio è possibile studiare casi più sofisticati in cui segmento portante è per esempio un arco di ellisse, o di cerchio o di iperbole ecc...

L'autore è già impegnato in queste analisi, che si prospettano interessanti, permettendo ad esempio di far luce su "quanto" conviene "chiudere" un'ala.

Questa analisi non può ritenersi esaustiva. Se per esempio si prende in considerazione il peso dell'ala, le sollecitazioni strutturali, i problemi di meccanica del volo e di aeroelasticità, la dimostrata *superiore efficienza aerodinamica* legata ad una riduzione della resistenza indotta, *potrebbe non essere più vera*.

## Ringraziamenti

L'autore ringrazia i prof. G. Monegato e A. Bacciotti del Politecnico di Torino per i preziosi suggerimenti avuti e l'ing. G. Saporito dell'Università di Pisa per la disponibilità dimostrata.

---

<sup>10</sup>In caso contrario si hanno tante incognite di distribuzioni per quanti sono i tratti in cui bisogna cambiare le coordinate usate. Il problema è ancora risolvibile (si tratta ora di risolvere un sistema di equazioni integrali), ma la complessità della trattazione analitica sconsiglia di applicare questo metodo.



## Bibliografia

- [1] I. Kroo, "Drag due to Lift: Concepts for Prediction and Reduction", Annual Reviews Fluid Mechanics Vol. 33, 2001 pp. 587-617
- [2] M. Munk, "The minimum induced drag in airfoils", NACA Report 121, 1921
- [3] L. Prandtl, "Induced drag of multiplanes", NACA TN 182, 1924
- [4] A. Frediani, G. Montanari, "On the Prandtl best wing system", in: A. Frediani, A. Miele (Eds.), Advanced design problems in aerospace engineering, Plenum Press, NY 2001
- [5] J. Wolkovitch, "The joined wing aircraft: an overview", Journal of Aircraft, n. 23, 1986
- [6] G. Chiocchia, "Carichi aerodinamici e divergenza statica in un'ala anulare", XV Congr. Naz. AIDAA, Torino 1999
- [7] G. Chiocchia, E. Carrera, L. Demasi, "Studio aerodinamico di un'ala anulare ellittica", Conferenza AIDAA Palermo 24-28 Settembre 2001
- [8] L. Demasi, G. Chiocchia, E. Carrera, "Aerodinamica dei sistemi portanti chiusi: ala anulare ellittica", conferenza AIDAA Roma, 15-19 Settembre 2003
- [9] L. Demasi, "Studio Aerodinamico di Configurazioni Alari Innovative per Applicazioni Aeroelastiche", Tesi di dottorato, in fase di elaborazione
- [10] I. Kroo, "C-Wing Aerodynamics", <http://aero.stanford.edu/Reports/Nonplanarwings/CWingTheory.html>
- [11] G. Monegato, "Numerical evaluation of hypersingular integrals", Journal of Computational and Applied Mathematics 50 (1994) 9-31
- [12] G. Chiocchia, E. Carrera, D. Spinello, "Risultati di un modello FEM per l'analisi aeroelastica di architetture alari non convenzionali", XIV Congr. Naz. AIDAA, Napoli 1997
- [13] L. Prandtl, "Beitrag zur Theorie der tragenden Fläche", ZAMM, Vol. 16, n.6, 1936, pp.360-361
- [14] E. Pistolesi, "Betrachtungen über die gegenseitige Beeinflussung von Tragflügelssystemen", in Gesammelte Vorträge der Hauptversammlung 1937 der Lilienthal-Gesellschaft, Berlin, 1937
- [15] J. Weissinger, "Über die Auftriebverteilung von Pfeilflügeln", Forsch. Ber. d. Zentr. f. Wiss. Berichtswesen 1553, Berlin-Adlershof, 1942
- [16] A. Bacciotti, "Teoria matematica dei controllati", CELID 1998, Torino
- [17] Sito per il calcolo degli integrali on line: "<http://integrals.wolfram.com/>"
- [18] Chiocchia G., "A Reflection on Induced Drag", "Design challenges and mathematical methods in aircraft and spacecraft" 39th Workshop International School of Mathematics "G. Stampacchia" at Ettore Majorana Foundation and Center for Scientific Culture Erice (TP), Italy 1-10 July 2003

## Appendice A - Derivazione Equazione di Eulero nel Caso di Ala Anulare Circolare

$$J(m(\cdot) + \alpha \delta_1(\cdot)) = \frac{\pi}{16R_w l V_\infty^4} \int_{-1}^1 (m(s) + \alpha \delta_1(s)) \cdot \left( - \int_{-1}^1 (m(t) + \alpha \delta_1(t)) \left( \frac{1}{(1 - \cos(\pi(t-s)))} \right) dt \right) ds. \quad (42)$$

La cui derivata rispetto al parametro  $\alpha$  calcolata per  $\alpha = 0$ , considerando il fatto che la funzione integranda che ne consegue è simmetrica, risulta:

$$\left[ \frac{d}{d\alpha} J(m(\cdot) + \alpha \delta_1(\cdot)) \right]_{\alpha=0} = 2 \frac{\pi}{16R_w l V_\infty^4} \int_{-1}^1 \delta_1(t) \left( - \int_{-1}^1 \left( \frac{m(s)}{(1 - \cos(\pi(t-s)))} \right) ds \right) dt. \quad (43)$$

L'equazione del vincolo è ovviamente il coefficiente di portanza assegnato (superficie di riferimento il doppio dell'area in pianta):

$$- \frac{\pi}{2lV_\infty^2} \int_{-1}^1 m(s) \sin(\pi s) ds = \bar{C}_L, \quad (44)$$

che può essere riscritta:

$$- \frac{\pi}{2lV_\infty^2} \int_{-1}^t m(s) \sin(\pi s) ds = l(t) \Rightarrow l'(t) + \frac{\pi}{2lV_\infty^2} m(t) \sin(\pi t) = 0, \quad (45)$$

con la condizione  $l(1) = \overline{C}_L$ . Si ragiona ora in modo simile a quanto fatto prima nella scrittura della (43):

$$\left( l'(t) + \alpha \delta_2'(t) + \frac{\pi}{2lV_\infty^2} (m(t) + \alpha \delta_1(t)) \sin(\pi t) \right) = 0. \quad (46)$$

Derivando rispetto ad  $\alpha$ :

$$\left( \delta_2'(t) + \delta_1(t) \frac{\pi}{2lV_\infty^2} \sin(\pi t) \right) = 0. \quad (47)$$

Moltiplicando per  $\lambda(t)$  ed integrando per parti il termine contenente  $\delta_2'(t)$ <sup>11</sup>:

$$I = - \int_{-1}^1 \lambda'(t) \delta_2(t) dt + \frac{\pi}{2lV_\infty^2} \int_{-1}^1 \lambda(t) \delta_1(t) \sin(\pi t) dt. \quad (48)$$

Sommando  $I$  all'equazione ricavata in precedenza per il funzionale senza vincolo (metodo dei moltiplicatori di lagrange), si ha:

$$2 \frac{\pi}{16R_w l V_\infty^4} \int_{-1}^1 \delta_1(t) \left( - \int_{-1}^1 \left( \frac{m(s)}{(1-\cos(\pi(t-s)))} \right) ds \right) dt - \int_{-1}^1 \lambda'(t) \delta_2(t) dt + \frac{\pi}{2lV_\infty^2} \int_{-1}^1 \lambda(t) \delta_1(t) \sin(\pi t) dt = 0. \quad (49)$$

Vista l'arbitrarietà delle funzioni  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , si può porre separatamente  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$ , ottenendo il set di 2 equazioni:

$$\delta_1(t) \equiv 0 \Rightarrow - \int_{-1}^1 \lambda'(t) \delta_2(t) dt = 0 \Rightarrow \lambda'(t) = 0 \Rightarrow \lambda(t) = \text{Cost}, \quad (50)$$

$$\delta_2(t) \equiv 0 \Rightarrow 2 \frac{\pi}{16R_w l V_\infty^4} \int_{-1}^1 \delta_1(t) \left( - \int_{-1}^1 \left( \frac{m(s)}{(1-\cos(\pi(t-s)))} \right) ds \right) dt + \frac{\pi}{2lV_\infty^2} \int_{-1}^1 \lambda(t) \delta_1(t) \sin(\pi t) dt = 0. \quad (51)$$

Tenuta presente la prima equazione, la seconda diviene:

$$\int_{-1}^1 \left[ \delta_1(t) \left( 2 \frac{\pi}{16R_w l V_\infty^4} \int_{-1}^1 \left( \frac{m(s)}{(1-\cos(\pi(t-s)))} \right) ds + \frac{\pi}{2lV_\infty^2} \lambda \sin(\pi t) \right) \right] dt = 0, \quad (52)$$

ed applicando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni:

$$\frac{1}{4R_w l V_\infty^2} \int_{-1}^1 \frac{m(s)}{1-\cos(\pi(t-s))} ds - \lambda \sin(\pi t) = 0. \quad (53)$$

## Appendice B - Ala Anulare Circolare. Soluzione Analitica Equazione di Eulero

Una possibile rielaborazione dell'integrale che compare nella (7) può essere la seguente. Si pone:

$$\begin{aligned} u &= \tan \frac{\pi t}{2}, \\ v &= \tan \frac{\pi s}{2}; \end{aligned} \quad (54)$$

deducendo dunque:

$$\begin{aligned} \sin \pi t &= \frac{2 \tan \frac{\pi t}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\pi t}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \\ \cos \pi t &= \frac{1-u^2}{1+u^2}, \\ \sin \pi s &= \frac{2 \tan \frac{\pi s}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\pi s}{2}} = \frac{2v}{1+v^2}, \\ \cos \pi s &= \frac{1-v^2}{1+v^2}. \end{aligned} \quad (55)$$

<sup>11</sup>Si noti che le condizioni ai valori terminali dell'intervallo d'integrazione, fanno sì che debba essere  $\delta_2(+1) = \delta_2(-1) = 0$ .

Con questo cambio di variabili, l'integrale da risolvere in (7) diviene:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{k \sin(\pi s)}{1 - \cos(\pi(t-s))} ds = \frac{2k(1+u^2)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v}{1+v^2} \frac{1}{(v-u)^2} dv. \quad (56)$$

Operando alcune manipolazioni algebriche, si ha:

$$\int \frac{v}{1+v^2} \frac{1}{(v-u)^2} dv = \ln \frac{(1+v^2)^{\frac{v^2}{2(u^4+2u^2+1)}}}{(1+v^2)^{\frac{1}{2(u^4+2u^2+1)}}} - \frac{2}{u^4+2u^2+1} u \arctan v + \ln \frac{|(v-u)|^{\frac{1}{u^4+2u^2+1}}}{|(v-u)|^{\frac{u^2}{u^4+2u^2+1}}} - \frac{u}{(1+u^2)(v-u)}. \quad (57)$$

Calcolando l'integrale secondo la parte finita di Hadamard [11] si deduce:

$$\frac{2k(1+u^2)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v}{1+v^2} \frac{1}{(v-u)^2} dv = -\frac{2\pi u}{u^4+2u^2+1} \frac{2k(1+u^2)}{\pi} = -2k \frac{2u}{1+u^2}. \quad (58)$$

Ricordando la definizione di  $u$  :

$$-2k \frac{2u}{1+u^2} = -2k \sin(\pi t). \quad (59)$$

Si ha allora:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{k \sin(\pi s)}{1 - \cos(\pi(t-s))} ds = -2k \sin(\pi t). \quad (60)$$

## Appendice C - Equazione di Eulero nel Caso di Ala Anulare Ellittica con $a_w < b_w$ . Soluzione analitica

Similmente al caso dell'ala anulare circolare, l'equazione di Eulero è:

$$\frac{2\pi}{16b_w t V_\infty^4} \int_{-1}^1 \delta_1(t) \int_{-1}^1 [-m(s) K(t,s)] dt ds - \int_{-1}^1 \lambda'(t) \delta_2(t) dt + \frac{\pi}{2t V_\infty^2} \int_{-1}^1 \lambda(t) \delta_1(t) \sin(\pi t) dt = 0. \quad (61)$$

Anche ora si trova che  $\lambda$  deve essere una costante. Sostituendo questo risultato nell'equazione di Eulero ed eseguendo alcune manipolazioni algebriche:

$$\frac{1}{4V_\infty^2} \int_{-1}^1 m(s) K(t,s) ds - \lambda b_w \sin(\pi t) = 0, \quad (62)$$

che va abbinata alla condizione di coefficiente di portanza assegnato. Anche ora si cerca una soluzione del tipo  $m(s) = k \sin(\pi s)$ . Si ha dunque sostituendo:

$$\frac{1}{4V_\infty^2} I_A - \frac{1}{4V_\infty^2} I_B + \frac{1}{4V_\infty^2} I_C - \lambda b_w \sin(\pi t) = 0, \quad (63)$$

dove:

$$\begin{aligned} I_A &= \int_{-1}^1 \frac{k \sin(\pi s) \sinh^2 \psi_w \cosh^2 \psi_w}{\left(\sinh^2 \psi_w + \sin^2\left(\frac{\pi(t+s)}{2}\right)\right)^2} ds = k \sinh^2 \psi_w \cosh^2 \psi_w \int_{-1}^1 \frac{\sin(\pi s)}{\left(\sinh^2 \psi_w + \sin^2\left(\frac{\pi(t+s)}{2}\right)\right)^2} ds, \\ I_B &= \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{2} k \sin(\pi s) \cosh(2\psi_w)}{\left(\sinh^2 \psi_w + \sin^2\left(\frac{\pi(t+s)}{2}\right)\right)} ds = \frac{k \cosh(2\psi_w)}{2} \int_{-1}^1 \frac{\sin(\pi s)}{\left(\sinh^2 \psi_w + \sin^2\left(\frac{\pi(t+s)}{2}\right)\right)} ds, \\ I_C &= \int_{-1}^1 \frac{k \sin(\pi s)}{(1 - \cos(\pi(t-s)))} ds = k \int_{-1}^1 \frac{\sin(\pi s)}{(1 - \cos(\pi(t-s)))} ds. \end{aligned} \quad (64)$$

È possibile dimostrare [9] con ragionamenti simili a quelli fatti per l'ala anulare circolare, le espressioni:

$$\begin{aligned} I_A &= -2k \frac{\sin \pi t}{\sinh 2\psi_w}, \\ I_B &= 2k \sin \pi t \cosh(2\psi_w) \left(1 - \frac{\cosh 2\psi_w}{\sinh 2\psi_w}\right), \\ I_C &= -2k \sin(\pi t). \end{aligned} \quad (65)$$

Sostituendo nell'equazione di Eulero e ricordando le trasformazioni che regolano il passaggio dalle funzioni iperboliche ai semiassi dell'ellisse<sup>12</sup>, si arriva a scrivere:

$$\begin{aligned} k &= -\frac{2lV_\infty^2}{\pi} \bar{C}_L, \\ \lambda &= \frac{2l\bar{C}_L}{\pi(b_w + a_w)}. \end{aligned} \quad (66)$$

Sostituendo le espressioni trovate e gli integrali calcolati si deduce facilmente che il coefficiente di resistenza indotta è:

$$\begin{aligned} (C_{Di})_{\frac{a_w}{b_w} < 1} &= -\frac{l\bar{C}_L^2}{4\pi b_w} \int_{-1}^1 \sin(\pi s) \left(\frac{I_A(s)}{k} - \frac{I_B(s)}{k} + \frac{I_C(s)}{k}\right) ds = \\ &= \frac{l\bar{C}_L^2}{2\pi b_w} \int_{-1}^1 \sin^2(\pi s) \left(\frac{1}{\sinh 2\psi_w} + \cosh(2\psi_w) \left(1 - \frac{\cosh 2\psi_w}{\sinh 2\psi_w}\right) + 1\right) ds = \\ &= \frac{l\bar{C}_L^2}{2\pi b_w} \int_{-1}^1 \sin^2(\pi s) \frac{2b_w}{b_w + a_w} ds = \frac{l\bar{C}_L^2}{\pi(b_w + a_w)} \int_{-1}^1 \sin^2(\pi s) ds = \frac{l\bar{C}_L^2}{\pi(b_w + a_w)}. \end{aligned} \quad (67)$$

## Appendice D - Dimostrazione non Unicità della distribuzione Ottima nel Caso di ala anulare circolare ed ellittica

Nella trattazione teorica effettuata, si è trovata la distribuzione ottima di circolazione per l'ala anulare circolare ed ellittica. È però noto ([1], [10]) che *in un sistema portante chiuso se si somma una circolazione costante non si altera il valore della portanza e della resistenza indotta*. La formulazione qui riportata *deve* soddisfare a questo requisito. Si analizza il caso di ala anulare ellittica con  $a_w < b_w$  e di ala circolare.

- **Ala anulare ellittica con  $a_w < b_w$**

Si consideri l'espressione della distribuzione ottima trovata in precedenza:

$$m(t) = k \sin(\pi t).$$

Per quanto detto sopra, anche la distribuzione

$$m(t) = k \sin(\pi t) + \bar{m} \quad (68)$$

( $\bar{m}$  scelta a piacere) è *di ottimo*. Per dimostrare che questo è vero, vista la linearità delle equazioni è sufficiente mostrare che *il contributo alla resistenza indotta del termine costante è nullo*. Osservando l'espressione della resistenza indotta questo avviene se  $I'_A - I'_B + I'_C = 0$ <sup>13</sup>. Si ha:

$$\begin{aligned} I'_A &= \int_{-1}^1 \frac{\bar{m} \sinh^2 \psi_w \cosh^2 \psi_w}{\left(\sinh^2 \psi_w + \sin^2\left(\frac{\pi(t+s)}{2}\right)\right)^2} ds = \\ &= \bar{m} \sinh^2 \psi_w \cosh^2 \psi_w \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\sinh^2 \psi_w + \sin^2\left(\frac{\pi(t+s)}{2}\right)\right)^2} ds, \\ I'_B &= \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{2} \bar{m} \cosh(2\psi_w)}{\left(\sinh^2 \psi_w + \sin^2\left(\frac{\pi(t+s)}{2}\right)\right)} ds = \frac{\bar{m} \cosh(2\psi_w)}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\sinh^2 \psi_w + \sin^2\left(\frac{\pi(t+s)}{2}\right)\right)} ds, \\ I'_C &= \int_{-1}^1 \frac{\bar{m}}{(1 - \cos(\pi(t-s)))} ds = \bar{m} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - \cos(\pi(t-s)))} ds. \end{aligned} \quad (69)$$

<sup>12</sup>Le relazioni che legano le grandezze in questione sono:

$$\cosh^2 \psi_w = \frac{b_w^2}{b_w^2 - a_w^2}, \quad \sinh^2 \psi_w = \frac{a_w^2}{b_w^2 - a_w^2}.$$

<sup>13</sup>Si noti che  $I'_A, I'_B, I'_C$  sono corrispondenti ai termini  $I_A, I_B, I_C$  (vedere appendice C) ma valutati ora per  $m(t) = \bar{m}$ .

È immediato vedere che  $I'_C = 0$ . Usando le trasformazioni viste in appendice C si ricava [9]:

$$I'_A = I'_B = \bar{m} \frac{\cosh 2\psi_w}{\sinh \psi_w \cosh \psi_w}. \quad (70)$$

Dunque si è dimostrato l'asserto, essendo  $I'_A - I'_B + I'_C = 0$ . Per la portanza la dimostrazione è banale e non viene qui riportata.

- **Ala anulare circolare.**

Si opera come per l'ala anulare ellittica. La dimostrazione segue osservando che ora compare solo l'integrale  $I'_C$  e che questo è nullo.

## Appendice E - Circolazione Ottima in un Biplano

In [3], Prandtl studiò le condizioni per avere il biplano avente la minima resistenza indotta. Egli analizzò l'espressione della resistenza indotta e concluse che il biplano ottimo ha le due ali con uguale apertura e distribuzione di circolazione. Nella sua trattazione impiegò una distribuzione di circolazione ellittica su entrambe le semiali. Prandtl però *non affermò mai che la distribuzione ellittica era quella ottimale*. Semplicemente egli sostenne di aver preso la distribuzione ellittica perchè più simile ad una distribuzione reale (che si annulla alle estremità) rispetto ad una distribuzione costante. Senza entrare nel dettaglio (vedere [9]), utilizzando il riferimento di figura 3 è possibile scrivere il potenziale delle accelerazioni come fatto negli altri casi esaminati e poi con il calcolo variazionale trovare la condizione di minimo. Prendendo come positiva la distribuzione di dipoli diretta verso  $+z$ , è possibile dimostrare che la condizione di minimo avviene quando la velocità indotta (il "normalwash") sulle due ali è costante. Questo naturalmente è in accordo col teorema di Munk prima esaminato. Inoltre in ([9]) si dimostra che nelle condizioni di ottimo le distribuzioni di dipoli (o circolazione) sulle due ali sono le stesse.

Il normalwash sull'ala 1 risulta:<sup>14</sup>

$$u_{n1}(y) = -\frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b_w}^{+b_w} \frac{m_1(y_{d1})}{(y-y_{d1})^2} dy_{d1} - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b_w}^{+b_w} m_2(y_{d1}) \frac{(y-y_{d1})^2 - H^2}{((y-y_{d1})^2 + H^2)^2} dy_{d1}. \quad (71)$$

Poichè nelle condizioni di ottimo si dimostra che  $u_{n1} = u_{n2}$  e che  $m_1 = m_2 = m$ , eliminando gli ormai inutili pedici, il normalwash su un'ala del biplano è:

$$u_n(y) = -\frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b_w}^{+b_w} \frac{m(y_d)}{(y-y_d)^2} dy_d - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b_w}^{+b_w} m(y_d) \frac{(y-y_d)^2 - H^2}{((y-y_d)^2 + H^2)^2} dy_d. \quad (72)$$

È banale riconoscere nel termine  $\int_{-b_w}^{+b_w} \frac{m(y_d)}{(y-y_d)^2} dy_d$  (costanti moltiplicative a parte) lo *stesso termine dell'ala monoplana*.

Per l'ala monoplana quando la distribuzione di dipoli è quella ellittica, tale integrale è costante<sup>15</sup>. Dunque affinché la distribuzione ellittica sia di ottimo *anche per il biplano*, il secondo integrale (dovuto alla mutua induzione delle ali) deve essere costante. È facilissimo dimostrare che questo non avviene in quanto il suo valore non è indipendente  $day$  come invece accade per l'integrale di Hadamard dovuto all'autoinduzione (naturalmente quest'ultima non è una proprietà generale, ma vale per la particolare distribuzione di dipoli che si sta analizzando!). Il concetto è illustrato nelle figure 4, 5, 6 dove si riporta l'andamento della distribuzione ottima di dipoli su un'ala del biplano, confrontato con quello che si avrebbe se la distribuzione fosse ellittica ed il coefficiente di portanza lo stesso. In tutti i casi, chiaramente solo il caso di ali infinitamente lontane o coincidenti fornisce come distribuzione ottimale quella ellittica. Ci si convince di questo osservando che il secondo integrale si riconduce al primo (a meno di costanti moltiplicative) quando  $H$  tende a zero od infinito. Dunque in tali situazioni si ricade in una equazione strutturalmente identica a quella del monoplano e pertanto la condizione di ottimo è la stessa del monoplano. In tutti gli altri infiniti possibili casi in cui la distanza tra le ali risulta finita, la cosa non è più vera. Pertanto *la distribuzione ottima di circolazione di un biplano con ali a distanza finita non nulla non è quella ellittica*.

<sup>14</sup>Scambiando i pedici 1 e 2 si trova l'analogia espressione per l'ala 2. Si noti inoltre che nel termine legato alla mutua induzione compare la variabile  $y_{d1}$  riferita all'ala 1 e non  $y_{d2}$  (riferita all'ala 2). Questa operazione è lecita in quanto si tratta di variabile muta di integrazione. Inoltre è possibile pensare di effettuare l'integrazione sulle due ali in modo che sia sempre  $y_{d1} = y_{d2}$ .

<sup>15</sup>Infatti il normalwash per un'ala monoplana è costante se la distribuzione di circolazione è ellittica.

| $\frac{a_w}{b_w}$ | $100 \cdot (C_{D_i})_{\frac{a_w}{b_w} < 1}$ | $100 \cdot (C_{D_i})_{\frac{a_w}{b_w} < 1}$ |
|-------------------|---|---|
|                   | teorico                                     | calcolato                                   |
| 0.01              | 3.15  | 3.15  |
| 0.10              | 2.89  | 2.89  |
| 0.20              | 2.66  | 2.65  |
| 0.30              | 2.45  | 2.45  |
| 0.40              | 2.27  | 2.27  |

Tabella 1: Coefficiente di minima resistenza indotta, teorico e calcolato.

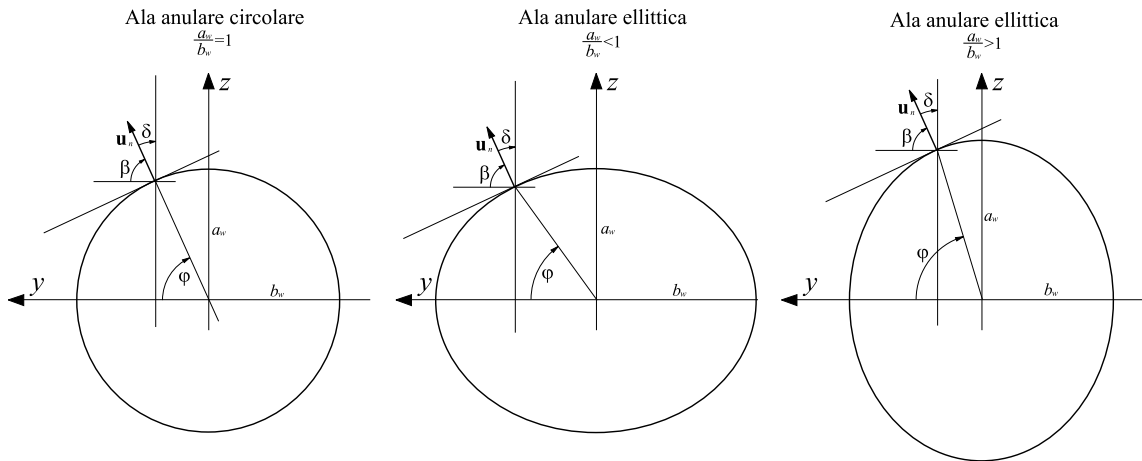


Figura 1. Condizione di minima resistenza indotta secondo Munk [2].

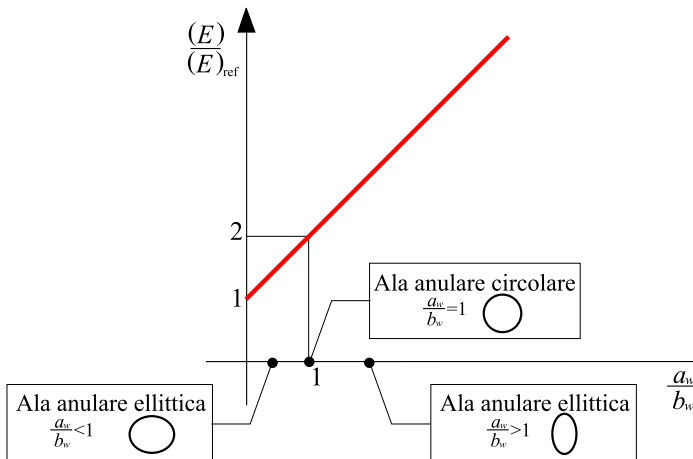


Figura 2. Confronti con l'ala classica.

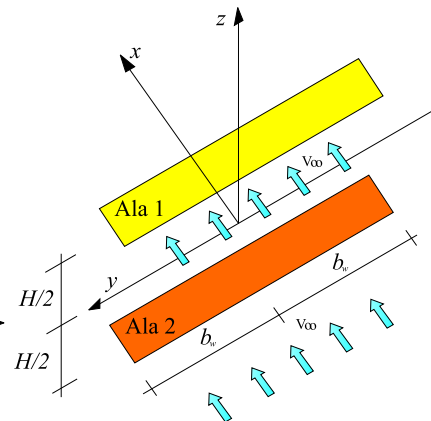


Figura 3. Geometria di un biplano.

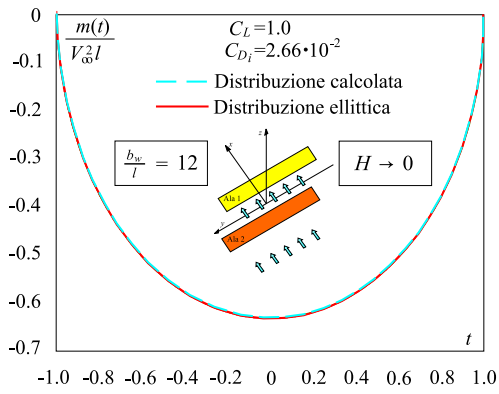


Figura 4. Ali a distanza infinitesima.

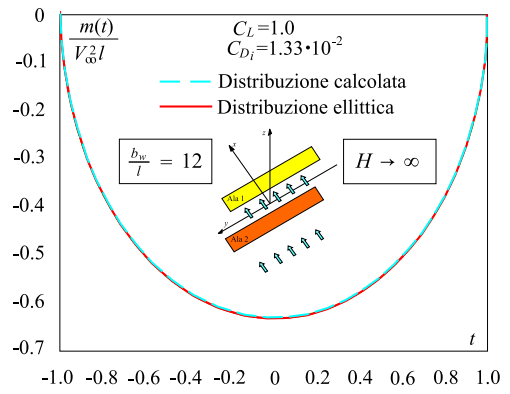


Figura 5. Ali a distanza infinita.

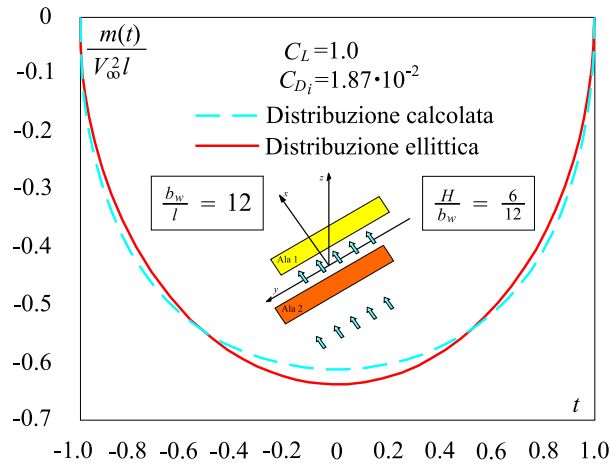


Figura 6. Biplano con ali a distanza finita.